ECOLE NAVALE

×I47×

Concours 1977

Première composition de mathématiques

On pose :

$$I(a) = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(x + 2a)\sqrt{|x^2 - 1|}} \quad , \quad a \neq 0 \ .$$

1.1. — Montrer que $I(a)$ a un sens.

1.2. — Montrer qu'il suffit d'étudier $I(a)$ pour a strictement positif, en comparant $I(a)$ et $I(-a)$.

1.3. — Dans cette question, on effectue sur $I(a)$ le changement de variable : $x = au$;

Quel est le sens de variation de $I(a)$ quand a varie de 0 à 1 ?

Montrer que lorsque a tend vers zéro, $I(a)$ tend vers :

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u + 2}$$

Que vaut J ?

2.1. — Selon les valeurs de a, strictement positif, écrire $I(a)$ sans le signe de valeur absolue; puis, effectuer sur les intégrales ainsi trouvées le changement de variable défini par : $y = \dfrac{1}{x + 2a}$.

2.2. — Exprimer $I(a)$, sous forme logarithmique, pour $0 < a < \frac{1}{2}$, et retrouver le résultat du 1.3.

2.3. — Calculer $I(a)$ pour : $\frac{1}{2} < a < 1$.

2.4. — Calculer $I(\frac{1}{2})$. Utiliser les résultats du 2.2. et du 2.3. pour étudier la continuité de $I(a)$ pour $a = \frac{1}{2}$.

2.5. — Calculer $I(a)$ pour $a > 1$.

2.6. — Calculer $I(1)$ et étudier la continuité de $I(a)$ pour $a = 1$.

3.1. — A partir du résultat du 2.5., étudier la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$; déterminer la fonction la plus simple possible qui soit équivalente à $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

3.2. — A partir de l'expression trouvée au 2.3., exprimer, pour $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $I(a)\sqrt{4a^2 - 1}$ en fonction de :

$$g(a) = \operatorname{Arcsin}\left[\frac{4}{3}\sqrt{(1 - a^2)(4a^2 - 1)}\right]$$

Tracer le graphique de l'application définie par $y = g(x)$ en précisant le sens de concavité de la courbe représentative.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail